نشریهٔ مهندسی عمران فردوسی DOI: 10.22067/civil.v32i2.66209 سال سی و دوم، شمارهٔ دو، ۱۳۹۸

آنالیز الاستیک ورق‌های چندلایه با هندسه و شرایط مرزی دلخواه با استفاده از فرمول‌بندی ترکیبی تئوری لایه‌گون*

محمد طاهر کمالی[1] یاسر محمدی[2] آرش انصاری[3] بابک شکرالهی‌زاده[4]

چکیده *در این مقاله یک حل سه‌بعدی با فرمول‌بندی ترکیبی لایه‌گون جهت ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای با هندسه و شرایط مرزی دلخواه ارائه شده است. در این مطالعه میدان‌های جابه‌جایی و تنش خارج از صفحه به صورت مجموع یک سری توابع با ضرایب مجهول در نظر گرفته می‌شوند. شرایط مرزی و پیوستگی جابه‌جایی‌ها و تنش‌های بین لایه‌ای در مرز لایه‌های دقیقا ارضا می‌شوند. معادلات تعادل و سازگاری، با استفاده از اصل تغییرات ریزنر اعمال می‌شوند. نتایج نشان می‌دهند که فرمول‌بندی ترکیبی نسبت به فرمول‌بندی جابه‌جایی دارای همگرایی سریع‌تری است و تنش‌های بین لایه‌ای را با دقت بهتری ارائه می‌کند.*

واژه‌های کلیدی ورق‌های کامپوزیت چندلایه‌ای، اصل تغییرات ریزنر، فرمول‌بندی ترکیبی لایه‌گون، تنش‌های بین لایه‌ای، شرایط مرزی.

Elastic Analysis of Multi-Layer Plates with Arbitrary Geometry and Boundary Conditions Using Layerwise Mixed Formulation

M.T. Kamali Y. Mohamadi A. Ansari B. Shokrolahi-Zadeh

Abstract *In this paper, a three-dimensional solution with mixed layerwise formulation is presented for multi-layer composite plates with arbitrary geometry and boundary conditions. In this study, the displacement field the out-of plane stresses are considered as a sum of a series of functions with unknown coefficients. The boundary conditions and the continuity of the displacement field and the traction stresses between the layers are exactly satisfied. Equilibrium and compatibility equations are also applied using the Reissner's variational principle. The results show that the mixed formulation has faster convergence than displacement based formulation, and provides more accurate values of interlaminar stresses.*

Key Words Multi-Layer Composite Plates, Reissner's Variational Principle, Layerwise Mixed Formulation, Interlaminar Stresses, Boundary Conditions.

---

* تاریخ دریافت مقاله ۹۶/٤/۲۸ تاریخ پذیرش آن ۹٦/۹/۲۹ می‌باشد.

(۱) نویسندهٔ مسئول: دانشیار، گروه مهندسی عمران، دانشگاه هرمزگان.

Email: kamali@hormozgan.ac.ir

(۲) فارغ التحصیل کارشناسی ارشد، گروه مهندسی عمران، دانشگاه هرمزگان.

(۳) فارغ التحصیل کارشناسی ارشد، گروه مهندسی عمران، دانشگاه هرمزگان.

(٤) استادیار، گروه مهندسی عمران، دانشگاه هرمزگان.

مقدمه

مصالح کامپوزیت به‌خاطر رفتار ناهمسانگرد دارای برخی ویژگی‌های ممتاز نسبت به مواد همسانگرد هستند. به‌طور نمونه مواد کامپوزیت لایه‌ای دارای سختی و مقاومت زیادی در راستای الیاف هستند. با ترکیب چندین لایۀ کامپوزیتی می‌توان یک ورق کامپوزیتی با خواص مورد نظر را به دست آورد. مقاومت و سختی بالا، وزن کم، مقاومت در برابر حرارت، رطوبت و خوردگی مواد کامپوزیتی، به‌طوری‌که همۀ این ویژگی‌ها را نمی‌توان در یک مادۀ همگن پیدا کرد، باعث شده است که این مصالح، کاربردهای فراوانی در مهندسی عمران و صنایع هوافضا پیدا کنند. با توجه به افزایش روزافزون کاربرد مصالح کامپوزیت، ارائۀ روش‌های دقیق‌تر جهت بررسی رفتار این سازه‌ها به‌منظور استفاده بهینه از آنها ضروری است.

تنوع تئوری‌های مختلف تحلیل ورق‌های چندلایه کامپوزیتی عمدتاً به خاطر فرضیاتی است که به نحوۀ تغییرات کمیت‌های مجهول در راستای ضخامت ورق‌ها مربوط می‌شود. بررسی برخی تئوری‌های متداول ورق‌های چندلایه در مقالات مروری [1-4] و کتاب‌های [5,6] آمده است. معمولاً با استفاده از روش‌های مبتنی بر حساب تغییرات، معادلات حاکم بر مسئله برای تئوری‌های مختلف به دست می‌آید. روش‌های مبتنی بر فرمول‌بندی جابه‌جایی بر اساس قانون تغییر شکل مجازی و روش‌های مبتنی بر فرمول‌بندی ترکیبی بر اساس قانون تغییراتی هلینگر–ریزنر و واشیزو [7,8] می‌باشند. تئوری کلاسیک ورق‌ها (CPT) برای ورق‌های نازک دارای دقت مناسبی است و برای ورق‌های ضخیم، دقت خود را از دست می‌دهد از نخستین کارهای مربوط به ورق‌های کامپوزیت، می‌توان به کارهای مراجع [9,10] با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبۀ اول (FSDT) اشاره نمود. در این راستا تئوری‌های لایه‌گون [11] و زیگزاگ مرتبۀ بالا [12,13] و روش‌های مبتنی بر الاستیسیته سه‌بعدی [14-16] برای تحلیل ورق‌های ضخیم به وجود آمده‌اند.

در تحلیل ورق‌های کامپوزیت چندلایه‌ای، محاسبه هرچه دقیق‌تر تنش‌های بین لایه‌ای (تنش‌های خارج از صفحه) دارای اهمیت زیادی است، زیرا که پدیده‌های لغزش و جداشدگی بین لایه‌ها بر اثر این تنش‌ها به وجود می‌آید. تنش‌های بین لایه‌ای در مرز مشترک بین لایه‌ها پیوسته می‌باشند. در روش‌های تغییراتی مبتنی بر فرمول‌بندی جابه‌جایی، پیوستگی تنش‌های بین لایه‌ای به‌طور دقیق ارضا نمی شود و با توجه به اهمیت برآورد هرچه دقیق‌تر تنش‌های بین لایه‌ای، روش‌های تغییراتی مبتنی بر فرمول‌بندی ترکیبی نظیر روش‌های با فرمول‌بندی ترکیبی و تئوری لایه‌گون به وجود آمده‌اند. در خصوص تحلیل ورق‌های لایه‌ای با استفاده از فرمول‌بندی ترکیبی و تئوری لایه‌گون می‌توان به کارهای [17-24] اشاره نمود. در این مطالعات، غالباً هندسه مستطیلی ورق بررسی شده است و از روش اجزای محدود استفاده شده است.

در تحقیق حاضر به بررسی کامپوزیت لایه‌ای الاستیک با هندسه و شرایط مرزی دلخواه با استفاده از فرمول‌بندی ترکیبی و تئوری لایه‌گون پرداخته می‌شود. در فرمول‌بندی ارائه شده، علاوه بر پیوستگی میدان جابه‌جایی و تنش‌های بین لایه‌ای در مرز مشترک بین لایه‌ها، شرایط مرزی طبیعی و هندسی نیز به‌طور دقیق ارضا می‌گردند. در این مقاله، روند همگرایی روش با فرمول‌بندی ترکیبی با روش با فرمول‌بندی مبتنی بر جابه‌جایی مقایسه شده است. همچنین اثر نسبت طول به ضخامت ورق $(\frac{a}{h})$ بر تغییرات تنش‌های بین لایه‌ای در امتداد ضخامت بررسی شده است.

بیان مسئله و فرمول‌بندی روش لایه‌گون

مطابق شکل (۱)، یک ورق کامپوزیت با هندسه دلخواه متشکل از M لایه $\Omega_i, i = 1,2, \dots, M$ را در نظر بگیرید. تگاه مختصات کارتزین طوری انتخاب می‌شود که مختصات z در راستای ضخامت لایه‌ها قرار گیرد. توابع

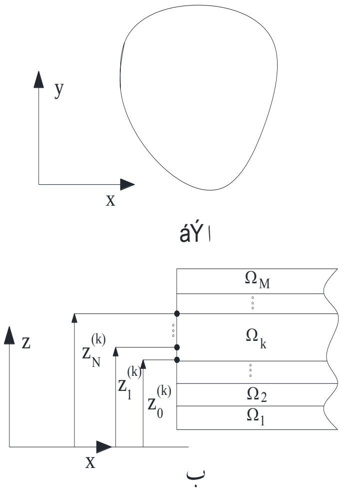
جابه‌جایی u, v, w به ترتیب در جهات x, y, z در لایهٔ k ام بر اساس تئوری لایه‌گون به‌صورت زیر بیان می‌شود:
برای $\alpha = u, v, w$:

$$\alpha^{(k)} = \sum_{n=0}^{N_\alpha} \varphi_{n-(\alpha)}^{(k)}(x,y)\,\psi_{n-(\alpha)}^{(k)}(z) \qquad (۱)$$

$$\varphi_{n-(\alpha)}^{(k)}(x,y) = B_\alpha(x,y)\sum_{m=0}^{p_\alpha}\sum_{l=0}^{p_\alpha-m} d_r^{(\alpha)-\gamma} x^m y^l \qquad (۲)$$

$$\psi_{n-(\alpha)}^{(k)}(z) = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq n}}^{N_\alpha} \frac{\left(z-z_i^{(k)}\right)}{\left(z_i^{(k)}-z_i^{(k)}\right)} \qquad (۳)$$

$$r = \frac{(2p_\alpha - m + 3)m}{2} + l + 1, \gamma = (k-1)N_\alpha + n + 1 \qquad (٤)$$



شکل ۱ ورق کامپوزیت M لایه با هندسه دلخواه: الف(پلان ورق ب) نمای ورق

در روابط فوق، $B_\alpha(x,y)$ برای ارضای شرایط مرزی اساسی همگن لحاظ شده است، p_α مرتبهٔ چندجمله‌ای در صفحه xy، N_α مرتبه چندجمله‌ای لاگرانژ در راستای z، $d_r^{(\alpha)-\gamma}$ ضریب مجهول، r و γ نیز شمارنده می‌باشند. تابع مرز $B_\alpha(x,y)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود [14]:

$$B_\alpha(x,y) = \prod_{j=1}^{nb}\left[\Gamma_j^{(\alpha)}(x,y)\right]^{\eta_j^{(\alpha)}} \qquad (۵)$$

که در آن nb تعداد مرزها، $\Gamma_j^{(\alpha)}(x,y) = 0$ معادله مرز j ام و $\eta_j^{(\alpha)}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\eta_j^{(\alpha)} = \begin{cases} 0 & \text{if } \alpha \neq 0 \text{ on jth boudary} \\ 1 & \text{if } \alpha = 0 \text{ on jth boudary} \end{cases} \qquad (٦)$$

به طریق مشابه تنش‌های خارج از صفحه در لایه k ام نیز به‌صورت زیر بیان می‌شوند
برای $\alpha = \sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}$:

$$\alpha^{(k)} = \sum_{n=0}^{N_\alpha} \varphi_{n-(\alpha)}^{(k)}(x,y)\,\psi_{n-(\alpha)}^{(k)}(z) \qquad (۷)$$

$$\varphi_{n-(\alpha)}^{(k)}(x,y) = \sum_{m=0}^{p_\alpha}\sum_{l=0}^{p_\alpha-m} d_r^{(\alpha)-\gamma} x^m y^l \qquad (۸)$$

$$\psi_{n-(\alpha)}^{(k)}(z) = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq n}}^{N_\alpha} \frac{\left(z-z_i^{(k)}\right)}{\left(z_i^{(k)}-z_i^{(k)}\right)} \qquad (۹)$$

$$r = \frac{(2p_\alpha - m + 3)m}{2} + l + 1, \gamma = (k-1)N_\alpha + n \qquad (۱۰)$$

در رابطهٔ (۸)، $\varphi_{0-(\alpha)}^{(1)}(x,y)$ و $\varphi_{N_\alpha-(\alpha)}^{(M)}(x,y)$ بر اساس شرایط مرزی طبیعی در وجوه پایینی و بالایی ورق به‌طور دقیق تعیین خواهند شد باعث می‌شود شرایط مرزی طبیعی به دقیق ارضا شود.

روابط ساختاری

مؤلفه های تانسورهای تنش و کرنش را به‌صورت مؤلفه‌های تنش و کرنش خارج صفحه، ε_n, σ_n و داخل صفحه، ε_p, σ_p به‌صورت زیر تفکیک می‌کنیم:

$$\sigma_n = \begin{Bmatrix}\sigma_{zz}\\ \sigma_{xz}\\ \sigma_{yz}\end{Bmatrix}, \sigma_p = \begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{xy}\end{Bmatrix}, \varepsilon_n = \begin{Bmatrix}\varepsilon_{zz}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{yz}\end{Bmatrix}, \varepsilon_p = \begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} \qquad (۱۱)$$

با استفاده از قانون هوک، رابطهٔ بین مؤلفه‌های تنش و کرنش را برای یک لایه کامپوزیت رشته‌ای در صفحه xy می‌توان به‌صورت زیر نوشت [25]:

$$\sigma_n = C_{nn}\varepsilon_n + C_{np}\varepsilon_p \quad (۱۲)$$

$$\sigma_p = C_{pn}\varepsilon_n + C_{pp}\varepsilon_p \quad (۱۳)$$

$$C_{nn} = \begin{bmatrix} C_{33} & 0 & 0 \\ 0 & C_{55} & C_{45} \\ 0 & C_{45} & C_{44} \end{bmatrix}, C_{pn} = \begin{bmatrix} C_{13} & 0 & 0 \\ C_{23} & 0 & 0 \\ C_{36} & 0 & 0 \end{bmatrix}, C_{np} = C_{pn}^T, C_{pp} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{bmatrix}$$

(۱٤)

که در آن C_{ij}، ضرایب الاستیک ماده هستند. روابط (۱۲) و (۱۳) را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\sigma_{pH} = \bar{C}_{pp}\varepsilon_{pG} + \bar{C}_{pn}\sigma_{nM} \quad (۱۵)$$

$$\varepsilon_{nH} = \bar{C}_{np}\varepsilon_{pG} + \bar{C}_{nn}\sigma_{nM} \quad (۱٦)$$

که در آن:

$$\bar{C}_{pp} = C_{pp} - C_{pn}(C_{nn})^{-1}C_{np}, \bar{C}_{pn} = C_{pn}(C_{nn})^{-1}, \bar{C}_{np} = -(C_{nn})^{-1}C_{np}, \bar{C}_{nn}0 = (C_{nn})^{-1}$$

(۱۷)

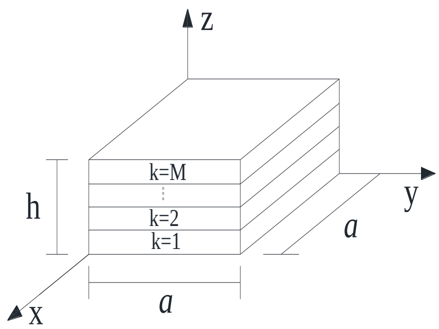
در روابط (۱۳) و (۱٤)، σ_{nM} تنش خارج از صفحه به‌دست‌آمده از رابطهٔ (۵) و ε_{pG} کرنش درون صفحه‌ای به‌دست‌آمده از روابط هندسی کرنش- جابه‌جایی و رابطهٔ (۱) است و زیرنویس H بیانگر مقادیر به‌دست‌آمده از رابطهٔ هوک است.

با بررسی روابط (۱) تا (۱۰) می‌توان نشان داد که پیوستگی میدان جابه‌جایی و تنش‌های خارج از صفحه در مرز بین لایه‌ها برقرار است؛ بنابراین برای کامل شدن حل مسئله، باید معادلات تعادل و شرایط سازگاری را نیز ارضا کرد. ارضای معادلات تعادل و شرایط سازگاری با استفاده از قانون تغییراتی ریزنر [25-27] به‌صورت زیر امکان‌پذیر است:

$$\sum_{k=1}^{M} \iiint_{\Omega_k} \left[\delta\varepsilon_{pG}^T\sigma_{pH} + \delta\varepsilon_{nG}^T\sigma_{nM} + \delta\sigma_{nM}^T(\varepsilon_{nG} - \varepsilon_{nH})\right] d\Omega_k - \delta W^e = 0$$

(۱۸)

که در آن عملگر δ، بیانگر تغییرات و W^e، کار انجام شده توسط نیروهای خارجی است. رابطهٔ (۱۸) منجر به یک دستگاه معادلات خطی بر حسب ضرایب مجهول، d خواهد شد.

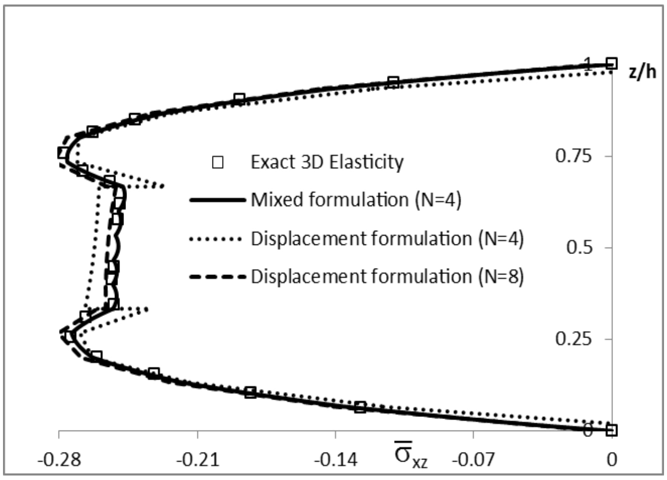


شکل ۲ ورق کامپوزیت چندلایه مربعی

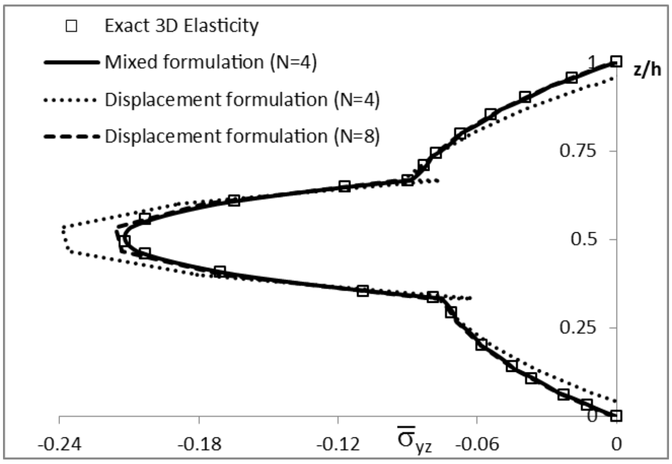
نتایج و بحث

به‌منظور صحت‌سنجی و کارایی روش ارائه شده، مطابق شکل (۲)، ورق‌های مربعی کامپوزیت سه لایه $0° / 90° / 0°$ و چهار لایه‌ای $0° / 90° / 90° / 0°$ را در نظر بگیرید. مطابق شکل (۲)، مبدأ مختصات در یکی از گوشه‌های ورق، محور z در راستای ضخامت و محورهای x,y در امتداد لبه‌های ورق قرار دارند. ضخامت لایه‌ها یکسان و ضخامت کل ورق برابر h فرض می‌شود. ورق‌های لایه‌ای موجود تحت بارگذاری عرضی سینوسی بر روی وجه بالایی آنها به‌صورت زیر قرار دارد:

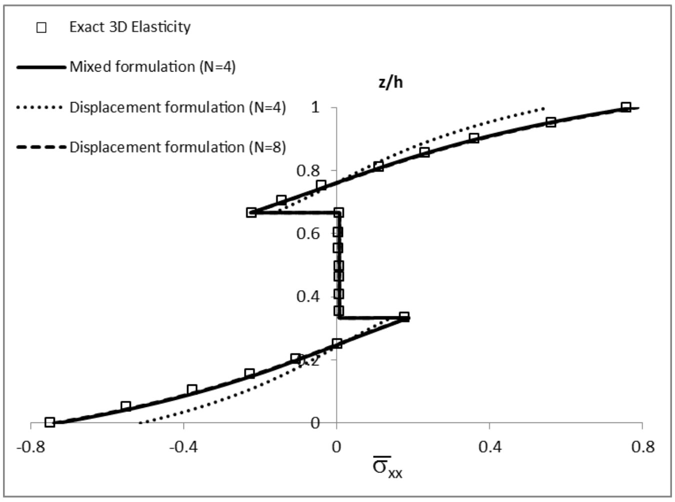
$$t_z = q_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \quad (۱۹)$$



شکل ۳ تغییرات تنش برشی بی‌بعد شده $\bar{\sigma}_{xz}(a,a/2,z)$ در راستای ضخامت برای کامپوزیت سه لایه‌ای 0° / 90° / 0°



شکل ٤ تغییرات تنش برشی بی‌بعد شده $\bar{\sigma}_{yz}(a/2,a,z)$ در راستای ضخامت برای کامپوزیت سه لایه‌ای 0° / 90° / 0°



شکل ۵ تغییرات تنش عمودی بی‌بعد شده $\bar{\sigma}_{xx}(a/2,a/2,z)$ در راستای ضخامت برای کامپوزیت سه لایه‌ای 0°90° / 0°

خواص الاســـتیک هر لایه، با فرض اینکه جهت رشته‌ها در جهت محور ۱ باشد، به‌صورت زیر است:

$$E_1 = 25E_2, E_2 = E_3,\ G_{12} = G_{13} = 0.5\,E_2,\ G_{23} = 0.2\,E_2,\ \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25 \quad (۲۰)$$

با توجه به بارگذاری داده شده، شرایط مرزی طبیعی به‌صورت زیر است:

$$\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0,\ \text{on}\ z = 0, \quad (۲۱)$$

$$\sigma_{zz} = q_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right),\ \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0,\ \text{on}\ z = h, \quad (۲۲)$$

بنابراین برای ارضـــای شـــرایط مرزی طبیعی، توابع $\varphi_{0-(\alpha)}^{(1)}(x,y)$ و $\varphi_{N_\alpha-(\alpha)}^{(M)}(x,y)$ را به‌صـــورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$\varphi_{0-(\alpha)}^{(1)} = 0,\ \alpha = \sigma_{zz}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz} \quad (۲۳)$$

$$\varphi_{N_\alpha-(\sigma_{zz})}^{(M)} = q_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right), \varphi_{N_\alpha-(\alpha)}^{(M)} = 0, \alpha = \sigma_{xz}, \sigma_{yz} \quad (۲۴)$$

شرایط مرزی اساسی برای حالات تکیه‌گاه مفصلی و گیردار به‌صورت زیر است:
تمام تکیه‌گاه‌ها مفصلی:

$$u = 0\ \text{on}\ y = 0, a, v = 0\ \text{on}\ x = 0, a,\ w = 0\ \text{on}\ x = 0, a, y = 0, a \quad (۲۵)$$

تمام تکیه‌گاه‌ها گیردار:

$$u = v = w = 0\ \text{on}\ x = 0, a, y = 0, a \quad (۲۶)$$

برای ارضای شرایط مرزی اساسی، توابع مرز برای حالت‌های تکیه‌گاه مفصلی و گیردار به صورت‌های زیر در نظر گرفته می‌شوند:
تمام تکیه‌گاه‌ها مفصلی:

$$B_u(x,y) = y(y-a),\ B_v(x,y) = x(x-a), B_w(x,y) = x(x-a)y(y-a) \quad (۲۷)$$

تمام تکیه‌گاه‌ها گیردار:

$$B_u(x,y) = B_v(x,y) = B_w(x,y) = x(x-a)y(y-a) \quad (۲۸)$$

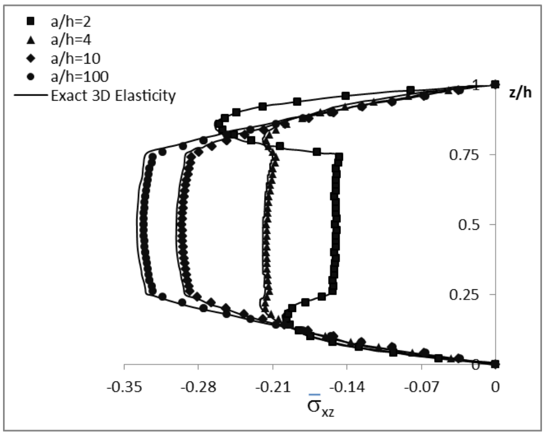
مقادیر تنش‌ها به‌صورت زیر بی‌بعد شده‌اند:

$$\bar{\sigma}_{xz}\left(a,\frac{a}{2},z\right) = \sigma_{xz}\left(a,\frac{a}{2},z\right)\frac{h}{q_0 a}, \bar{\sigma}_{yz}\left(\frac{a}{2},a,z\right) = \sigma_{yz}\left(\frac{a}{2},a,z\right)\frac{h}{q_0 a}, \bar{\sigma}_{xx}\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},z\right) = \sigma_{xx}(a/2,a/2,z)\frac{h^2}{q_0 a^2} \quad (۲۹)$$

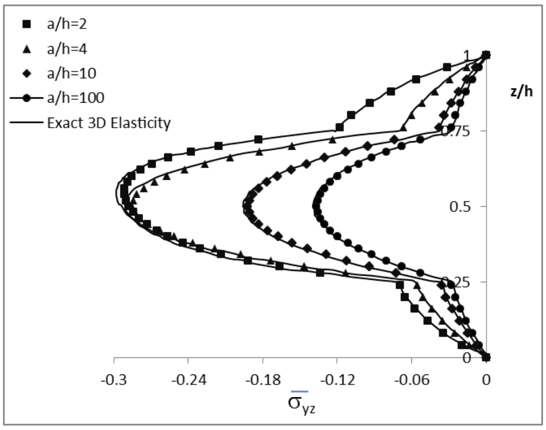
در کـــلـــیـــهٔ مـــثـــال‌هـــا $p_\alpha = 9, \alpha = u, v, w, \sigma_{zz}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$، و تکیه‌گاه‌ها مفصلی می‌باشند.

در شکل‌های (۳) تا (۵) برای ورق کامپوزیت سه لایه‌ای متعامد $0° / 90° / 0°$، تغییرات تنش‌های برشی نرمال شده خارج از صفحه، $\bar{\sigma}_{xz}(a,a/2,z)$ و $\bar{\sigma}_{yz}(a/2,a,z)$، و تنش عمودی نرمال شده درون صفحه، $\bar{\sigma}_{xx}(a/2,a/2,z)$، در راستای ضخامت ورق رسم شده‌اند. در شکل‌های (۳) تا (۵) روند همگرایی نتایج فرمول‌بندی ترکیبی و فرمول‌بندی مبتنی بر جابه‌جایی بر اساس $N_\alpha = N, \alpha = u, v, w, \sigma_{zz}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$ با هم مقایسه شده‌اند و با مقادیر حل دقیق مبتنی بر الاستیسیته سه‌بعدی [28] مقایسه شده‌اند. این شکل‌ها نشان می‌دهند که در حالت $N = 4$، نتایج فرمول‌بندی ترکیبی نسبت به فرمول‌بندی مبتنی بر جابه‌جایی، دارای انطباق بهتری با نتایج حل دقیق می‌باشند. در حالت $N = 4$، در فرمول‌بندی مبتنی بر جابه‌جایی، تنش‌های برشی بین‌لایه‌ای $\bar{\sigma}_{xz}$ و $\bar{\sigma}_{yz}$ در مرز بین لایه‌ها، $\frac{z}{h} = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$، ناپیوسته است که با

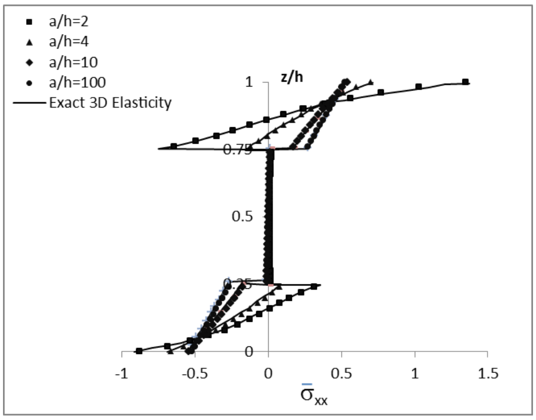
نتایج حل دقیق هم‌خوانی ندارد، درحالی‌که فرمول‌بندی ترکیبی پیوستگی به‌طور دقیق ارضا شده است و نتایج دارای انطباق خیلی خوبی با نتایج حل دقیق است. با توجه به شکل (۵)، در حالت $N = 4$، در فرمول‌بندی مبتنی بر جابه‌جایی، مقدار حداکثر تنش عمودی $\bar{\sigma}_{xx}$، کمتر از مقدار واقعی برآورد می‌شود. در شکل‌های (۳) تا (۵)، نتایج فرمول‌بندی مبتنی بر جابه‌جایی در حالت $N = 8$، بهبود یافته و به نتایج حل دقیق همگرا شده است.



شکل ٦ اثر a/h بر تغییرات تنش برشی بی‌بعد شده $\bar{\sigma}_{xz}(a, a/2, z)$ در راستای ضخامت برای کامپوزیت چهار لایه‌ای $0° / 90° / 90° / 0°$



شکل ۷ اثر a/h بر تغییرات تنش برشی بی‌بعد شده $\bar{\sigma}_{yz}(a/2, a, z)$ در راستای ضخامت برای کامپوزیت چهار لایه‌ای $0° / 90° / 90° / 0°$



شکل ۸ اثر a/h بر تغییرات تنش عمودی بی‌بعد شده $\bar{\sigma}_{xx}(a/2, a/2, z)$ در راستای ضخامت برای کامپوزیت چهار لایه‌ای $0° / 90° / 90° / 0°$

به‌منظور صحت‌سنجی بیشتر، برای ورق کامپوزیت چهار لایه‌ای متعامد $0° / 90° / 90° / 0°$، در شکل‌های (٦) تا (٨)، اثر طول به ضخامت، a/h، بر توزیع تنش‌های برشی نرمال شده خارج از صفحه، $\bar{\sigma}_{yz}(a/2, a, z)$ و $\bar{\sigma}_{xz}(a, a/2, z)$، و تنش عمودی نرمال شده درون صفحه، $\bar{\sigma}_{xx}(a/2, a/2, z)$، در راستای ضخامت ورق برر سی شده‌اند و با نتایج حل دقیق مقایسه شده‌اند. با توجه شکل‌های (٦) تا (٨)، نتایج فرمول‌بندی ترکیبی دارای انطباق خیلی خوبی با نتایج حل دقیق [28] می‌باشند.

نتیجه‌گیری

در این مقاله یک حل نیمه‌تحلیلی سه‌بعدی با فرمول‌بندی ترکیبی و تئوری لایه‌گون جهت ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای با هندسه و شرایط مرزی دلخواه ارائه شده است. در این مطالعه سه مؤلفهٔ میدان جابه‌جایی و سه مؤلفهٔ تنش خارج از صفحه به‌صورت مجموع یک سری توابع با ضرایب مجهول در نظر گرفته می‌شوند. این توابع طوری انتخاب شده‌اند که شرایط مرزی اساسی همگن و شرایط مرزی طبیعی غیر همگن و همچنین پیوستگی جابه‌جایی‌ها و تنش‌های بین لایه‌ای در مرز بین لایه‌های مجاور به‌طور دقیق ارضا می‌شود. معادلات تعادل و

سازگاری نیز با استفاده از اصل تغییرات ریزنر با دقت مناسب اعمال می‌شود. نتایج نشان می‌دهند که فرمول-بندی ترکیبی نسبت به فرمول‌بندی مبتنی بر جابه‌جایی دارای همگرایی سریع‌تری است و تنش‌های بین لایه‌ای را با دقت بهتری ارائه می‌کند. تنش‌های خارج از صفحه به‌دست‌آمده بر اساس این روش دارای انطباق خیلی خوبی با نتایج حل دقیق است.

مراجع

1. Carrera E., "Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells", *Archives of Computational Methods in Engineering*, Vol. 9, No. 2, pp. 87–140, (2002).
2. Reddy J.N., Robbins Jr D.H.,"Theories and computational models for composite laminates", *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 47, No. 6, pp. 147–69, (1994).
3. Noor A.K., Burton W.S., "Assessment of shear deformation theories for multilayered composite plates", *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 42, No. 1, pp. 1-13, (1989).
4. Carrera E., "Historical review of zig-zag theories for multilayered plates and shells", *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 56, No. 3, pp. 287-308, (2003).
5. Reddy J.N., "Mechanics of laminated composite plates and shells – theory and analysis", CRC Press, Boca Raton, (2004).
6. Reddy J.N., "An introduction to the finite element method", McGraw-Hill, New York, (2006).
7. Washizu K., "Variational methods in elasticity and plasticity", Pergamon Press, New York, (1982).
8. Reddy J.N., "Energy principles and variational methods in applied mechanics", John Wiley & Sons, New York, (2002).
9. Reissner E., "On a variational theorem in elasticity", *Journal of Mathematical Physics*, Vol. 29, pp. 90–95, (1950).
10. Mindlin R.D., "Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 18, pp. 31–38, (1951).
11. Reddy J.N., "A generalization of two-dimensional theories of laminated plates", *Communications in Applied Numerical Methods*, Vol. 3, pp. 173–180, (1987).
12. Cho M. and Parmerter R.R., "An efficient higher order plate theory for laminated composites", *Composite Structures*, Vol. 20, pp. 113–123, (1992).
13. Cho M. and Parmerter R.R., "Efficient higher order composite plate theory for general lamination configurations", *AIAA Journal*, Vol. 31, pp. 1299–1306, (1993).
14. Shodja H.M. and Kamali M.T., "Three-dimensional analysis of piezocomposite plates with arbitrary geometry and boundary conditions", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40, pp. 4837–4858, (2003).
15. Kamali M.T. and Shodja H.M., "A semi-analytical method for piezocomposite structures with arbitrary

interfaces", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 194, pp. 4588–4604, (2005).

16. Kamali M.T. and Pourmoghaddam S., "Three-dimensional analysis of multi-layer composite plates of arbitrary shape and boundary conditions with shear slip interfaces", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 23, pp. 481–493, (2016).
17. Moleiro F., Mota Soares C.M., Mota Soares C.A. and Reddy, J.N., "Layerwise mixed models for analysis of multilayered piezoelectric composite plates using least-squares formulation", *Composite Structures*, Vol. 119, pp. 134–149, (2015).
18. Moleiro F., Mota Soares C.M., Mota Soares C.A. and Reddy, J.N., "A layerwise mixed least-squares finite element model for static analysis of multilayered composite plates", *Computers & Structures*, Vol. 89, pp. 1730–1742, (2011).
19. Moleiro F., Mota Soares C.M., Mota Soares C.A. and Reddy, J.N., "Layerwise mixed least-squares finite element models for static and free vibration analysis of multilayered composite plates", *Composite Structures*, Vol. 92, pp. 2328-2338, (2010).
20. Moleiro F., Mota Soares C.M., Mota Soares C.A. and Reddy, J.N., "Mixed least-squares finite element models for static and free vibration analysis of laminated composite plates", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 198, pp. 1848-1856, (2009).
21. Moleiro F., Mota Soares C.M., Mota Soares C.A. and Reddy, J.N., "Mixed least-squares finite element model for the static analysis of laminated composite plates", *Computers & Structures*, Vol. 86, pp. 826-838, (2008).
22. Garcia Lage R., Mota Soares C.M., Mota Soares C.A. and Reddy, J.N., "Analysis of adaptive plate structures by mixed layerwise finite elements", *Composite Structures*, Vol. 66, pp. 269-276, (2004).
23. Garcia Lage R., Mota Soares C.M., Mota Soares C.A. and Reddy, J.N., "Analysis of laminated adaptive plate structures using layerwise finite element models", *Computers & Structures*, Vol. 82, pp. 1939-1959, (2004).
24. Garcia Lage R., Mota Soares C.M., Mota Soares C.A. and Reddy, J.N., "Modelling of piezolaminated plates using layerwise mixed finite elements", *Computers & Structures*, Vol. 82, pp. 1849-1863, (2004).
25. Carrera E., "Evaluation of layerwise mixed theories for laminated plates analysis," *AIAA Journal*, Vol. 36, pp. 830-839, (1986).
26. Reissner E., "On a certain mixed variational theory and proposed applications," *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 20, pp. 1366-1368, (1984).

27. Reissner E., "On a mixed variational theorem and on a shear deformable plate theory," *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, pp. 193-198, (1986).
28. Pagano N.J., "Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates", *Journal of Composite Materials*, Vol. 4, pp. 20-34, (1970).